APRENDAMOS A LEER MATEMÁTICA
DIDÁCTICA MATEMÁTICA BASADA EN LA SEMIÓTICA
(P O S T U L A D O S   V E R B A L E S   Y   S A B E R E S)

Alejandro Maturana Lorca

Chile – 2019

Registro ISBN
www.aprendamosaleermatematica.cl
Es un producto

Índice

Parte III Postulados Verbales y Saberes [1] [2]

Iniciaremos esta Parte con la siguiente expresión:

$$-10+\ -2 \bullet\ 3=\ -36$$

Usted, que ha venido leyendo este texto, escucha a alguien que lee, diciendo: "menos diez más menos dos es menos doce, y menos doce por tres es menos treinta y seis".

¿Cómo saber si está bien lo que ha dicho y la conclusión a que ha llegado?

> La que podríamos llamar "didáctica tradicional" porque es como en general se enseña, recomienda analizar la expresión de manera segmentada a través de "la prioridad o prevalencia de operaciones", que plantea: "realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones, aplicando las reglas relativas a paréntesis y la prevalencia de la multiplicación y la división por sobre la adición y la sustracción cuando corresponda"[3] , y usar además la llamada "regla de signos", que afirma: "menos por más es menos"[4].

Al seguir la "didáctica tradicional" y obviar la lectura de manera comprensiva, pareciera colegirse que para resolver un problema se deben ejecutar una serie de reglas mnemotécnicas, siendo un error por los siguientes motivos entre otros:

- ¿Cómo puede justificar el lector el resultado que obtenga?
- ¿Cómo argumenta lo que hace?
- ¿Qué significa no comprender algunas acciones que debe llevar a cabo y otras sí?

Al recordar la definición 1.19 de la articulación nos preguntarnos:

- ¿Cómo leer esta expresión?
- ¿Qué significado encontramos a partir de su lectura?

Al recordar los tres planos particulares, el plano $\prod_{\mathrm{PC}}$ de la comprensión, que es propio del sujeto que trata de comprender y de construir una imagen mental, no existe, porque no hay reconocimiento visual ni auditivo respecto de la notación de la expresión que se le presenta, lo que finalmente impide establecer en qué estado de aprendizaje se encuentra.

Definición3.1 Del texto matemático
Diremos que una expresión es un texto matemático, si su redacción aborda objetos matemáticos[5].

Notación La notación del texto matemático será:

- $\mathrm{T_{GE}}$, si solo aborda objetos geométricos.
- $\mathrm{T_{AR}}$, si solo aborda objetos aritméticos.
- $\mathrm{T_{AL}}$, si solo aborda objetos algebraicos.
- $\mathrm{T_{ARAL}}$, si aborda objetos aritméticos desde un punto de vista algebraico.
- $\mathrm{T_{GEAR}}$, si aborda objetos geométricos desde un punto de vista aritmético.
- $\mathrm{T_{GEAL}}$, si aborda objetos geométricos desde un punto de vista algebraico.

[1] Algunas referencias a pie de página hacen alusión a la bibliografía de los lingüistas en que se fundamenta esta didáctica, los que serán presentados en Parte IV.
[2] Recuerde que hablamos de fonetización cuando habla el moderador de la conversación, y de verbalización, cuando habla quien participa de ella pero no la modera. Hacemos esta diferencia porque quien no modera, puede hacer uso de la paráfrasis. En el fondo, cuando el moderador reconoce una verbalización válida, fonetización y verbalización guardan el mismo significado.
[3] En Objetivo de aprendizaje 5 (OA5), Matemática Quinto año básico, Ministerio de Educación de Chile, 2012 y en Módulo N°1 Operaciones combinadas: estrategias de cálculo y problemas, Guía Didáctica 5° año, Ministerio de Educación de Chile, 2013, entre otros muchos textos.
[4] Programa de estudio 8° básico Ministerio de Educación de Chile. Primera edición, julio de 2016.
[5] Parte II.

Características de los textos matemáticos

Cualquier texto matemático se caracterizará por:

- Encontrarse contextualizado[6], de manera que su lectura (fonetización) permita reconocer su significado[7].

- Contar con una estructura sintáctica que permite cumplir la convergencia a una realización o consecuencia inferencial comprobable, como plantea el complemento al concepto de razonamiento visto en Parte I.

- Enriquecer el acto didáctico al permitir reescribirlo en la medida de lo posible, de manera que no pierda su sentido original.

Si asumimos que la expresión $-10 + -2 \bullet 3 = -36$ es un texto aritmético, revisemos tres consideraciones respecto de él:

a) Podríamos contextualizarlo, suponiendo la acción de una persona que saca, para comer, galletas de una caja, quedando como posible redacción:

$$\mathbf{-\quad 10 \quad + \quad - \quad 2 \quad \bullet \quad 3}$$
"José, **sacó** diez galletas **y** después, **sacó** dos **veces** tres galletas"

De esta manera, el significado de la expresión dice relación no solo con que José sacó galletas, sino cómo lo hizo, es decir que saca diez, posteriormente saca otras tres, y finalmente vuelve a sacar tres, lo que podemos escribir:

$$\mathbf{-10 + -2 \bullet 3 = -10 + -3 + -3}$$

b) Un análisis sintáctico permite darnos cuenta que hay notación que representa una acción (**–** sacar), otra que representa cantidad de objetos (10, 3, diez, tres galletas), otra que representa una referencia de cantidad de veces que se repite la acción, es decir, José saca galletas (2 **•** **dos** veces) y otra, que enlaza las verbalizaciones describiendo cómo suceden los hechos (**+** y).

Y por último, que:

c) El enriquecimiento del acto didáctico provendrá del análisis que se haga al releer y/o ubicar la notación, que en este caso podría ser darnos cuenta que la igualdad: $-2 \bullet 3 = 2 \bullet -3 = -6$, es cierta[8], ya que:

$$\mathbf{-\quad 2 \quad \bullet \quad 3 \quad = \quad 2 \quad \bullet \quad - \quad 3}$$
"**sacar** dos **veces** tres galletas **totaliza lo mismo** que dos **veces sacar** tres galletas", lo que implica que la igualdad inicial (= –36) es errada, y que:

$$\mathbf{-10 + -2 \bullet 3 = -10 + 2 \bullet -3 = -16}$$

Vemos que, habiendo iniciado con una expresión, el análisis semiótico nos permite escribir otra con el mismo significado, y que conocido el contexto, ayuda además ahondar en competencias lectoras que analizamos en Parte II, como por ejemplo, reconocer los elementos del texto**,** y que repasamos a continuación contestando las siguientes cuatro preguntas:

1. ¿Cuántas veces, José sacó galletas?

Si decimos que sacó tres veces, estamos asumiendo que las primeras diez galletas fueron retiradas de una sola vez, es decir:

$$\mathbf{1 \quad \bullet \quad - \quad 10 \quad + \quad - \quad 2 \quad \bullet \quad 3}$$
"una vez sacó diez galletas y después, sacó dos veces tres galletas"

pudiendo haber sido una forma más clara de escribir, la siguiente:

$$\mathbf{1 \bullet -10 + 2 \bullet -3}$$

[6] Referencia de uso posible, L. Wittgenstein.
[7] Por la naturaleza del signo lingüístico, la interdependencia de los signos y la teoría del valor lingüístico, F. De Saussure.
[8] Si bien se sacan seis galletas en total, **la forma** en que sucede es distinta.

en donde los elementos que construyen el texto se encuentran ordenados de manera tal, que se pueda distinguir claramente la función que cumple cada uno de ellos, así por ejemplo, 1 y 2 hacen referencia a cuántas veces se sacan galletas, 10 y 3 a la cantidad de galletas retiradas, el signo **–** , a la acción ejecutada y el signo +, que indica la existencia de una secuencia de acciones.

Si en cambio, decimos que fueron al menos tres veces las que sacó galletas, ya que el texto original no explicita cómo fueron retiradas las diez primeras, la conversación se enriquece para hacer que la audiencia plantee sus argumentos y análisis.

2. ¿Por qué no calculamos: – 10 + – 2?

Si lo hiciéramos, no tendría sentido ya que 10 representa una cantidad de galletas, en cambio 2 no representa cantidad de galletas, sino a una cantidad de veces que algo sucede.

3. ¿Qué representa el signo **–** en el texto?

Representa la acción que ejecuta Juan, de retirar o sacar galletas de una caja para comérselas.

4. Si el contexto que se le ha dado al signo **–** fuera otro, ¿el resultado sería el mismo? ¿Por qué?

La respuesta es sí, y la fundamentaremos en este apartado.

Pudiendo existir infinidad de otros textos y diversos contextos como el que acabamos de considerar, se requiere de una formulación general que indique cómo verbalizar y contextualizar cualquier texto en vez de estar analizando cada caso, por lo que iniciaremos desde el principio.

Supongamos que usted recibe los Planes y Programas que deberá trabajar con sus estudiantes, Planes que se encuentran estructurados temporalmente, entregando los Contenidos en Unidades ordenadas e indicando qué enseñar y en qué momento hacerlo.

Asumiendo que sus estudiantes no necesariamente tienen los mismos intereses, conocimientos ni aptitudes, y que su Programa corresponde a un Curso que requiere conocimientos abordados en años anteriores, es lógico preguntarse qué y cómo hacer para que en el tiempo que dispone, los estudiantes se interesen, actualicen lo que no saben o han olvidado, aprendan y desarrollen las competencias que las Unidades del Programa exigen, y que el proceso sea percibido como un conjunto de conversaciones, ya que este método define la didáctica matemática como un acto conversacional.

La respuesta está en iniciar extrayendo de los Contenidos de la Unidad que debe abordar, indicadores de aprendizaje y separarlos en saber y saber hacer (secuencia iterada de pasos) de manera que para los saberes, analice; tipo de texto, categorías verbales e implementación, y para los saber hacer, analice también el objeto patrón y de cómo conciliar leyes del pensamiento con competencias del lenguaje.

A continuación, además de definiciones, observaciones y notas, se presentan los postulados verbales que caracterizan esta didáctica y que son necesarios para construir y/o abordar conversaciones que desarrollen saberes y saber hacer respecto de objetos matemáticos.

Postulados Verbales y Saber

Respecto de los saberes, nos preocuparemos de:

- Reconocer qué tipo de texto matemático debemos construir.
- Categorizar contenidos de aprendizaje en conjuntos verbales.
- Implementar una estructura didáctica de manera que la audiencia:
  - Interprete
  - Grafique
  - Argumente

Reconocer qué tipo de texto matemático construir

El tipo de texto matemático podrá ser alguno de los siguientes:

$$T_{GE}, T_{AR}, T_{AL}, T_{ARAL}, T_{GEAR} \text{ o } T_{GEAL}$$

Se dará cuenta de qué tipo se trata a través de los contenidos que planifique ya que en ellos se expresan los objetos y actos matemáticos que llevará a cabo, pudiendo suceder que sea más de uno con el fin de esclarecer o enriquecer los planteamientos que haga.

Categorizar contenidos de aprendizaje en conjuntos verbales

Las expresiones que redactan los contenidos de aprendizaje que contienen los Planes y Programas, las categorizaremos en alguno(s) de los siguientes conjuntos verbales o combinaciones de ellos:

- L_K de cantidades, siendo v_K un elemento cualquiera de dicho conjunto.
- $L_{\overline{F}}$ de constitución de partes iguales, siendo $v_{\overline{F}}$ un elemento cualquiera.
- L_R de referencias, siendo v_R un elemento cualquiera.
- L_D de definiciones, siendo v_D un elemento cualquiera.
- L_P de procesos, siendo v_P un elemento cualquiera.
- L_B de relaciones, siendo v_B un elemento cualquiera.

Para analizar los textos matemáticos, requeriremos de las siguientes observaciones:

Observación 3.1 De la notación de la secuencia de fonetizaciones
Como las fonetizaciones o verbalizaciones de los términos que componen un texto se siguen una tras otra, para distinguirlas e hilvanarlas, usaremos sg.

Observación 3.2 De la fonetización anterior y siguiente
Denotaremos $\mathbf{v_a}$ la fonetización o verbalización que anteceda inmediatamente a otra, y $\mathbf{v_s}$ a la que sea inmediatamente posterior.

Observación 3.3 De la modificación de las fonetizaciones
Denotaremos $\mathrm{mod}\, v_K$ a aquella fonetización o verbalización distinta a v_K, pero cuya notación es la misma.

Observación 3.4 De la notación de la secuencia de notaciones
Como las notaciones de los términos que componen un texto se siguen una tras otra, para distinguirlas e hilvanarlas, también usaremos sg.

Observación 3.5 De la notación anterior y siguiente
Denotaremos $\mathbf{n_{oa}}$ la notación que anteceda inmediatamente a otra, y $\mathbf{n_{os}}$ a la que sea inmediatamente posterior.

Observación 3.6 De la modificación de las notaciones
Denotaremos $\mathrm{mod}\, n_O$ a aquella notación distinta a n_O, pero cuya fonetización es la misma.

A continuación conoceremos los conjuntos verbales.

Conjunto verbal de cantidades $\mathbf{L_K}$

$$\mathrm{L_K} = \{0 \text{ ninguno(a), nada, cero; } 00 \text{ ciento(s); } 000 \text{ mil; } 000\,000 \text{ millón; } 1 \text{ al, la, el, ese(a), aquél, aquella, otro(a), un, uno(a); } 2 \text{ dos; } 3 \text{ tres; } \ldots\}$$

Conjunto verbal de constitución de partes iguales $\mathbf{L_{\frac{}{F}}}$

$$\mathrm{L_{\frac{}{F}}} = \{\tfrac{}{2} \text{ medio, mitad(es); } \tfrac{}{3} \text{ tercio(s), tercera(s) parte(s); } \ldots; \tfrac{}{N} \text{ enésimo(s), enésima(s) parte(s)}\}$$

Si combinamos los elementos de $\mathrm{L_K}$ con los de $\mathrm{L_{\frac{}{F}}}$, tendremos el siguiente conjunto de verbalizaciones:

Conjunto verbal de cantidad de partes iguales $\mathbf{L_{\frac{K}{F}}}$

$$\mathrm{L_{\frac{K}{F}}} = \left\{ \mathrm{v_K} \text{ sg } \mathrm{v_{\frac{}{F}}} = \mathrm{v_{\frac{K}{F}}} \text{ , en donde } \mathrm{v_K} \in \mathrm{L_K} \text{ y } \mathrm{v_{\frac{}{F}}} \in \mathrm{L_{\frac{}{F}}} \right\}$$

Como se planteó en la Observación 3.1, $\mathrm{v_K}$ sg $\mathrm{v_{\frac{}{F}}}$ indica que primero se lee el elemento de $\mathrm{L_K}$ y seguidamente el elemento de $\mathrm{L_{\frac{}{F}}}$, por lo que para no recargar la notación, cada vez que se combinen verbalizaciones de los conjuntos $\mathrm{L_K}$ y $\mathrm{L_{\frac{}{F}}}$, se acordará representar dicha combinación verbal como $\mathrm{v_{\frac{K}{F}}}$, es decir, $\mathrm{v_{\frac{K}{F}}}$ es un elemento de la unión de los conjuntos verbales $\mathrm{L_K}$ y $\mathrm{L_{\frac{}{F}}}$.

$$\mathrm{L_{\frac{K}{F}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ un, ese, aquel, otro medio; la, una, esa, otra, aquella mitad;} \\ \frac{2}{2} \text{ dos medios, dos mitades; } \frac{3}{2} \text{ tres medios, tres mitades; } \ldots; \\ \ldots \\ \frac{N}{2} \text{ N medios o mitades; } \frac{1}{3} \text{ un, ese, aquel, otro tercio; la, } \ldots \end{array} \right\}$$

Antes de presentar los próximos conjuntos verbales, necesitamos de las siguientes definiciones y observaciones.

Definición3.2 Del término base agregar
Basados en definición1.20, definición1.21 y el segundo principio de notación, se define al término "agregar" como término base que caracteriza a; adicionar, adjuntar, colocar, crecer, ganar, haber, incorporar, la coma, silencio, subir, sumar, tener, y, etc.

Notación La notación de "agregar" es **+**

Existiendo expresiones que indican lo contrario u opuesto a algo, requeriremos de la siguiente definición.

Definición3.3 De la negación de un término base
Las expresiones **no** o **ni** pueden eventualmente, si le anteceden, modificar en sentido contrario la definición de un término base.

Notación La notación de la negación es **−**

Observación 3.7 Distinguir entre negar una frase y un término base
Negar una frase significa que el valor de verdad de la frase se modifica a verdadero si la frase original es falsa, o a falso, si la frase original es verdadera, lo que no guarda relación con modificar negativamente un término base (que carece de valor de verdad).

La última observación es importante porque debemos comprender que la audiencia reconocerá como contrarios a un sinnúmero de verbos (subir – bajar, ganar – perder, haber – faltar, etc.) es decir, como contrario a subir, bajar, y a su vez como contrario a bajar, subir, sin embargo, decir: "Juan no subió cinco metros", no significa que Juan bajó cinco metros, de ahí que Definición3.3 se haya referido al sentido, y redactado "eventualmente, pueden modificar".

Definición3.4 Del término base quitar
Basados en definición1.20, definición1.21 y el segundo principio de notación, se define al término "quitar" como término base que caracteriza a: bajar, decrecer, disminuir, extraer, depreciar, faltar, gastar, perder, restar, retirar, sacar, sustraer, etc.

Notación Definición3.3 permite considerar – como la notación de "quitar".

Los actos de abstracción segundo y cuarto, vistos en Parte II, nos llevan a la siguiente definición.

Definición3.5 De la vez o veces
Los términos "vez" o "veces" se refieren a la repetición con que acontece algo.

Notación La notación de vez o veces es •

Definición3.6 Del término base dividir en partes iguales
Basados en definición1.20, definición1.21 y el segundo principio de notación, se define al término "dividir en partes iguales" como término base que caracteriza a: compartir, cortar, distribuir, repartir, separar, etc. en partes iguales.

Notación La notación de dividir en partes iguales es $\div$

Conjunto verbal de definiciones o conceptos $\mathrm{L_D}$

$$\mathrm{L_D} = \{\mathrm{L_+}, \mathrm{L_-}, \mathrm{L_{G_2}}, \mathrm{L_{G_3}}, \mathrm{L_\div}, \mathrm{L_=}\}$$, en donde:

$$\mathrm{L_+} = \left\{\begin{matrix} + \text{ adicionar, adjuntar, adquirir, avanzar, colocar, crecer, ganar, haber,} \\ \text{incorporar, la coma, silencio, subir, sumar, tener, etc.} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{L_-} = \left\{\begin{matrix} - \text{ bajar, deber, decrecer, disminuir, extraer, depreciar, faltar, gastar,} \\ \text{perder, restar, retirar, retroceder, sacar, sustraer, etc.} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{L_{G_2}} = \left\{\begin{matrix} \bullet \text{ rectángulo cuyos lados miden ... ;} \\ {}^2 \text{ cuadrado cuyos lados miden ... ;} \\ + \text{ a la derecha, arriba;} \\ - \text{ a la izquierda, abajo;} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{L_{G_3}} = \left\{\begin{matrix} \bullet\ \bullet \text{ paralelepípedo cuyas aristas miden ...} \\ {}^3 \text{ cubo cuyas aristas miden ... .} \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{L_\div} = \{\div \text{ distribuir, dividir, repartir, separar, ... en partes iguales; }\}$$

$$\mathrm{L_=} = \{= \text{ es, es decir, quiere decir que, por lo tanto, totaliza; }\}$$

Observación 3.8 De la notación del rectángulo
La notación de cualquier rectángulo es • , porque la superficie que ocupa es la agregación de un mismo cuadrado de arista uno (o de partes de él) una cierta cantidad de veces.[9]

Observación 3.9 De la notación del paralelepípedo
La notación de cualquier paralelepípedo es • • , porque el volumen que ocupa es la agregación de un mismo cubo de arista uno (o partes de él) una cierta cantidad de veces.

Conjunto verbal de referencias $\mathrm{L_R}$

$$\mathrm{L_R} = \left\{\begin{matrix} \bullet \text{ vez, veces, de, del} \\ (\quad) \text{ al (el) resultado de} \\ \text{— la cantidad de ... que cabe(n)exactamente en ... ;} \\ \text{... de los (las) ... partes iguales} \end{matrix}\right\}$$

La referencia puede aludir a:

- La cantidad de veces que se encuentra un objeto.
- Una parte de un objeto.

[9] Revise el concepto de objeto aritmético patrón en Parte II.

- La cantidad de veces que se encuentra una parte de un objeto.
- La cantidad de objetos que caben exactamente en otro objeto.
- Considerar el resultado de algo.

Observación 3.10 De la sintaxis de la referencia cuando $\mathbf{v_R = v_\bullet}$

Sea $v_R = v_\bullet \in \{vez, veces, de, del\}$ en texto $v_a \text{ sg } v_\bullet \text{ sg } v_s$

Las combinaciones posibles para el texto están dadas por $\left.\begin{matrix} v_K \\ v_{\frac{K}{F}} \end{matrix}\right\} \text{sg } v_\bullet \text{ sg } v_s$ pudiendo observar que la verbalización siguiente no se detalla.

Analicemos cada caso:

- Si $v_a \in L_K$, entonces $v_\bullet \in \{vez, veces\}$
- Si $v_a \in L_{\frac{K}{F}}$, entonces $v_\bullet \in \{de, del\}$

En ambos casos, la referencia hace alusión a la cantidad de veces que se encuentra un objeto o una parte del objeto.

A modo de ejemplos, consideremos las combinaciones de casos posibles:

a) $v_K \text{ sg } \mathbf{v_\bullet} \text{ sg } v_K$

a1) $2 \bullet 3$ dos veces tres
a2) $n \bullet P$ n veces P
a3) $1 \bullet j$ una vez j

b) $v_K \text{ sg } \mathbf{v_\bullet} \text{ sg } v_{\frac{K}{F}}$

b1) $2 \bullet \frac{1}{2}$ dos veces la mitad
b2) $1 \bullet \frac{1}{3}$ una vez la tercera parte
b3) $L \bullet \frac{E}{4}$ L veces E cuartas partes

c) $v_{\frac{K}{F}} \text{ sg } \mathbf{v_\bullet} \text{ sg } v_K$

c1) $\frac{1}{2} \bullet 4$ la mitad de cuatro
c2) $\frac{0}{7} \bullet 10$ ningún séptimo de diez
c3) $\frac{K}{3} \bullet T$ K tercios de T

d) $v_{\frac{K}{F}} \text{ sg } \mathbf{v_\bullet} \text{ sg } v_{\frac{K}{F}}$

d1) $\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2}$ la tercera parte de otra mitad
d2) $\frac{3}{4} \bullet \frac{3}{4}$ tres cuartos de tres cuartos
d3) $\frac{1}{2} \bullet \frac{W}{2}$ la mitad de W mitades

Observación 3.11 De la sintaxis de la referencia cuando $\mathbf{v_R = v_{()}}$

Sea $v_R = v_{()} \in \{\text{al resultado de, el resultado de}\}$

Las combinaciones posibles para el texto están dadas por $\left\{\begin{matrix} v_{()} \text{ sg } v_s \\ v_a \text{ sg } v_{()} \end{matrix}\right.$

Analicemos cada caso:

- Si $v_{()}$ es la verbalización inmediatamente anterior como muestra el texto $v_{()} \text{ sg } v_s$, entonces $v_{()} \in \{\text{al resultado de}\}$
- Si $v_{()}$ es la verbalización siguiente, como muestra el texto $v_{()} \text{ sg } v_s$, entonces $v_{()} \in \{\text{el resultado de, del resultado de}\}$.

A continuación, veremos un conjunto verbal que no aparece en el grupo detallado como aquellos que categorizan los contenidos de aprendizaje, esto se debe a que sus elementos presentan la misma notación de $v_\bullet$ y de $v_{\frac{K}{F}}$, pero sus verbalizaciones se encuentran modificadas para cumplir con el sentido del contexto que tenga la expresión que se analiza, como exige la Definición1.22.

Conjunto verbal de características $\mathbf{L_{ca}}$

Si $\mathrm{v_{ca}} \in \mathrm{L_{ca}}$, entonces $\mathrm{v_{ca}} = \mathrm{mod}\ \mathrm{v_K}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_R}\ \mathrm{sg} \begin{cases} \mathrm{v_K} \\ \mathrm{v_{\frac{K}{F}}} \end{cases}$ o, $\mathrm{v_{ca}} = \mathrm{v_{\frac{K}{F}}}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_{\bullet}}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{mod}\ \mathrm{v_k}$

en donde, $\mathrm{mod}\ \mathrm{v_K} \in \mathrm{mod}\ \mathrm{L_K} = \{1\ \text{la misma, el mismo};\ 2\ \text{doble};\ 3\ \text{triple};\ \dots\}$

Observación 3.12 De la sintaxis de la característica
Sea $\mathrm{v_a}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_R}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_s}$;

- Si $\mathrm{v_a} \in \mathrm{mod}\ \mathrm{L_K}$, entonces $\mathrm{v_R} \in \{\text{de}\}$ si $\mathrm{v_s} \in \mathrm{L_K} \cup \mathrm{L_{\frac{K}{F}}}$
- Si $\mathrm{v_a} \in \mathrm{mod}\ \mathrm{L_K}$, entonces $\mathrm{v_R} \in \{\text{del}\}$ si $\mathrm{v_s} \in \mathrm{mod}\ \mathrm{L_K}$

Note que de alguna manera, la característica hace las veces de una comparación o contraste.

A modo de ejemplos, consideremos las combinaciones de casos posibles:

a) $\mathrm{mod}\ \mathrm{v_K}\ \mathrm{sg}\ \mathbf{v_R}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_K}$

a1) $2 \bullet 3$ doble de tres
a2) $\mathrm{n} \bullet \mathrm{P}$ n tuplo de P
a3) $1 \bullet \mathrm{j}$ mismo de j

En a3) es recomendable hacer uso de la paráfrasis, negociar la conversación (Parte VI) y leer "el mismo que j".

Si por ejemplo, quisiéramos caracterizar un objeto A respecto de otro B, podríamos tener:

- $\mathrm{A} = 1 \bullet \mathrm{B}$ "A es el mismo que B".
- $\mathrm{A} = 2 \bullet \mathrm{B}$ "A es el doble de B".

b) $\mathrm{mod}\ \mathrm{v_K}\ \mathrm{sg}\ \mathbf{v_R}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_{\frac{K}{F}}}$

b1) $2 \bullet \frac{1}{2}$ el doble de la mitad
b2) $1 \bullet \frac{1}{3}$ lo mismo que una tercera parte
b3) $\mathrm{L} \bullet \frac{\mathrm{E}}{4}$ L tuplas de E cuartas partes

c) $\mathrm{v_{\frac{K}{F}}}\ \mathrm{sg}\ \mathbf{v_R}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{mod}\ \mathrm{v_K}$

c1) $\frac{1}{2} \bullet 4$ la mitad del cuádruple
c2) $\frac{0}{7} \bullet 2$ ningún séptimo del doble
c3) $\frac{\mathrm{K}}{3} \bullet 1$ K tercios del mismo

Nota. Podríamos considerar la estructura $\mathbf{v_R}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_K}\ \mathrm{sg}\ \mathrm{v_K}$, sin embargo las mediciones hechas en aula no recomiendan hacerlo porque altera la evolución positiva de la Matriz de Competencias (Parte V).

Definición3.7 De la notación implícita
Diremos que una notación se encuentra implícita en un texto, porque aunque no se visualice, se puede leer o decodificar, es decir, es explicitable.

Nos detendremos un momento para analizar dos situaciones didácticas.

Primera situación didáctica respecto de la notación implícita

Siendo la notación que representa vez o veces una de las que puede quedar implícita, consideremos el siguiente texto:

$$8 \div 2(2+2) =$$

Es probable que la didáctica "tradicional" haga lo siguiente:

- Explicite la notación implícita, quedando el texto $8 \div 2 \bullet (2+2) =$
- Por prioridad de operaciones resuelva el paréntesis, quedando:

$$8 \div 2 \bullet (4) =$$

- En este punto, plantee que existe ambigüedad, ya que desconoce el alcance de la división en partes iguales:

Si ocho es dividido por dos solamente, el resultado es 16.

Si ocho es dividido por el resultado de $2 \bullet (4)$, el resultado es 1.

- O incluso, que como $\div$ y $\bullet$ tienen la misma prioridad, se resuelve de izquierda a derecha, quedando como resultado 16.

Ahora veamos la propuesta de esta didáctica:

1) El hecho que precisamente no se explicite $\bullet$, le confiere un carácter de objeto único a la expresión $2(2+2)$, por lo que sus posibles lecturas son:

- Ocho dividido en partes iguales por el doble del resultado de la suma entre dos y dos, es decir, $8 \div 8 = 1$.

- Ocho dividido en partes iguales por dos veces el resultado de la suma entre dos y dos, es decir, $8 \div 8 = 1$.

2) Asumamos que no tiene por qué considerarse ese carácter de objeto único y explicitemos toda la notación, $8 \div 2 \bullet (2+2)$

Para que el resultado del texto fuera 16 se tendría que asumir $\div 2 = \frac{\ }{2}$ como notación equivalente, pero además, que sin terminar de leer el texto completo para interpretarlo, la notación equivalente puede reemplazar a la original, es decir que la didáctica "tradicional" asume de manera implícita que cuando se visualiza una notación, debe considerarse su notación equivalente, en este caso; $8 \div 2 \bullet (2+2) = \frac{8}{2} \bullet (2+2)$.

Para esta didáctica, lo anterior contradice la Definición1.22 ya que se estaría diciendo que ocho dividido en partes iguales por el doble del resultado de la suma entre dos y dos, es lo mismo que la mitad de ocho veces el resultado de la suma entre dos y dos, cosas con sentido totalmente distintos.

Segunda situación didáctica respecto de la notación implícita

La situación que se presenta a continuación dice relación con la transferencia de información, de textos literales, a matemáticos.

Sea el texto literal: Juan perdió dos panes y tres galletas.

Al momento de pedir que se reconozca entre otros textos matemáticos aquel que representa la situación, un alto porcentaje de estudiantes (8 años y más) reconoce a $-2+3$, como el correcto, justificando su respuesta equivocada bajo alguno de los siguientes argumentos:

- "porque perdió todo eso"
- "porque perdió los dos panes y también las galletas"
- "porque perdió dos y tres"

Al modificar el texto a "Juan ganó dos panes y perdió tres galletas", bajó de manera significativa el error, reconociendo un alto porcentaje como correcto al texto $+\ 2 + -3$.

Si bien son mediciones empíricas, se encontraron dos justificaciones a estos resultados, la primera, que en muchos textos o expresiones verbales hay términos que focalizan la atención de tal manera que desorientan al lector u oyente de la lectura continuada del texto o de lo que continúa de la conversación, y la segunda, que si dichos términos no son explicitados, el lector u oyente los asume como partícipes en los demás elementos del texto, por lo que se recomienda explicitar toda la notación en un principio para ir gradualmente acordando con la audiencia qué puede quedar implícito porque la verbalización permite que así pueda ser.

A continuación, revisaremos uno de los dos conjuntos verbales pendientes.

Conjunto verbal de procesos L_P

$L_P = L_{PA} \cup L_{PR}$, en donde:

$$L_{PA} = \left\{ v^n ;\ v, n \in L_K \cup L_{\frac{K}{F}},\ v > 1;\ \text{"proceso de ampliación a v, n veces"} \right\}$$

$$L_{PR} = \left\{ v^n ;\ v, n \in L_K \cup L_{\frac{K}{F}},\ 0 < v < 1; \text{proceso de reducción a v, n veces"} \right\}$$

Un proceso puede verbalizarse como de ampliación o reducción que sucede una cierta cantidad de veces, sin embargo es necesario considerar que en algunos casos, puede revertirse, es decir que una vez ampliado vuelva a su situación original, es decir se reduzca o viceversa, por lo que es necesario considerar una verbalización y su correspondiente notación que represente dicha situación.

De esta manera, extendemos $L_P = L_{PA} \cup L_{PR} \cup L_{PI}$, en donde:

$$L_{PI} = \left\{ v^{-n} ;\ v, n \in L_K \cup L_{\frac{K}{F}},\ n > 0 ; \text{proceso inverso a v , n veces} \right\}$$

Nota. Al decir "proceso inverso" queremos decir que se trata de un efecto contrario, de ahí que podemos considerar la notación de la negación pero no su sentido, porque no se niega el proceso.

Consideremos a modo de ejemplo, la expresión 2^1 bajo un contexto de procesos.

- Usted, interpreta: "proceso de duplicación que ocurre una vez".
- Envuelva lentamente mientras fonetiza cada elemento del texto, de manera que se reconozca la posición que tienen en el texto y la función que cumplen.
- Usted diga, "aplicaremos este proceso de duplicación (mostrando el 2) a una barra (y dibuja una recta de manera horizontal) una vez (y se dirige al uno y lo señala)".

No olvide que usted está haciendo acuerdos visuales, fonológicos y de notación, es decir está construyendo los Planos Particulares que después, durante la conversación, debe cerciorarse que sean los que desea y no otros.

- Usted ha dibujado la barra
- Ahora, usted implementará simultáneamente la temporalidad y el reconocimiento de los elementos del texto al escribir al lado de la barra que ha dibujado y decir lentamente mientras escribe:

"Inicialmente, el proceso de duplicación (escribe 2) no ha sucedido (escribe ^{0}) es decir tenemos (escribe =) la (escribe 1) barra o figura, intacta".

$$2^0 = 1$$

- Aproveche la bondad que presenta esta didáctica respecto del uso del tiempo que puede hacer el moderador, esto es, poder detenerse el tiempo que considere necesario en determinados elementos del texto para repetirlos o para hacer analogías con otras situaciones símiles, como por ejemplo:

- "¿En qué posición quedan los elementos del texto?"
- "¿Se fijan que la cantidad de veces que ocurre el proceso se ubica más arriba?"
- "¿Si en vez de una barra hubiese sido un cuadrado, habría sucedido lo mismo?"

Note que usted inicia de esta manera el primer acto noético, presentando un objeto geométrico (aplica el primer y segundo acto perceptivo), cumpliendo los supuestos de intención en forma coherente (se identifican el tercer y cuarto principio) e intencionada (se identifican sus tres principios) y además, cumple con, el concepto de percepción (Gestalt), la Observación 1.1 de la secuencia, la Situación1 (observador con objeto a la vista), el requisito de constructo visual – fonológico, la Definición1.17 de la explicación, la Definición1.19 de articulación, el complemento al concepto de razonamiento, la consideración tri – didáctica del objeto y la Definición1.24 de sentido.

Pregunte:

- “¿La expresión muestra una aplicación o una implementación?”

Con esta pregunta incorpora de manera natural el segundo acto noético, el que como vimos en Parte II, recomienda distinguir entre aplicar e implementar, por lo que usted puede continuar diciendo:

- “Observen que se ha dibujado una barra de un largo cualquiera, es decir que no hemos especificado su tamaño, por lo que estamos haciendo una aplicación del proceso de duplicación”.

Explique que como proceso, tiene sentido pensar en un antes de iniciado el proceso, que es lo que se ha graficado y escrito, un durante el desarrollo del proceso y un final del proceso, es decir cuando termina de ocurrir, y completa el diagrama de la barra inicial como se muestra a continuación:

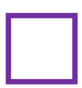
$2^0 = 1$

Fig.3.1

$2^1 = 2 \bullet 1 = 2$

- Al lado de las dos barras, escriba mientras dice: “el proceso de duplicación (escribe 2) ha sucedido una vez (escribe ^{1}), es decir tenemos (escribe =) el doble (escribe 2) de (escribe •) la (escribe 1) barra, es decir (escriba =) dos (escriba 2) barras como la inicial.

Aplique ahora el mismo proceso a un cuadrado.

- Dibuje el cuadrado  Fig.3.2

Antes de repetir la secuencia de pasos que desarrolló con la barra, muestre que el proceso afectará a toda la figura, por lo que el proceso de duplicación (o cualquier otro) se aplica a cada lado del cuadrado.

- Haga el dibujo como se muestra a continuación

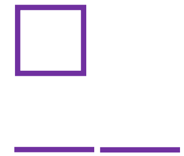


Fig.3.3

- A continuación complete como se muestra a continuación

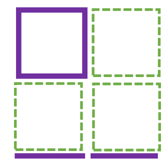


Fig.3.4

- Explique que al duplicarse el lado inferior, los demás lados también se verán afectados por el proceso, es decir, que cada lado del cuadrado se duplicará, quedando finalmente, cuatro cuadrados como el inicial.

- Escriba mientras verbaliza: “Al aplicar un proceso de duplicación (escriba 2) al lado (escriba L) del (escriba • entre 2 y L, y enciérrelos en un paréntesis) cuadrado (escriba ^{2}) obtenemos (escriba =) cuatro (escriba 4) cuadrados (escriba ^{2}) de (escriba • entre 4 y ^{2}) lado L”

$$(2 \bullet \mathrm{L})^2 = 4 \bullet \mathrm{L}^2$$